



Faculté de technologie

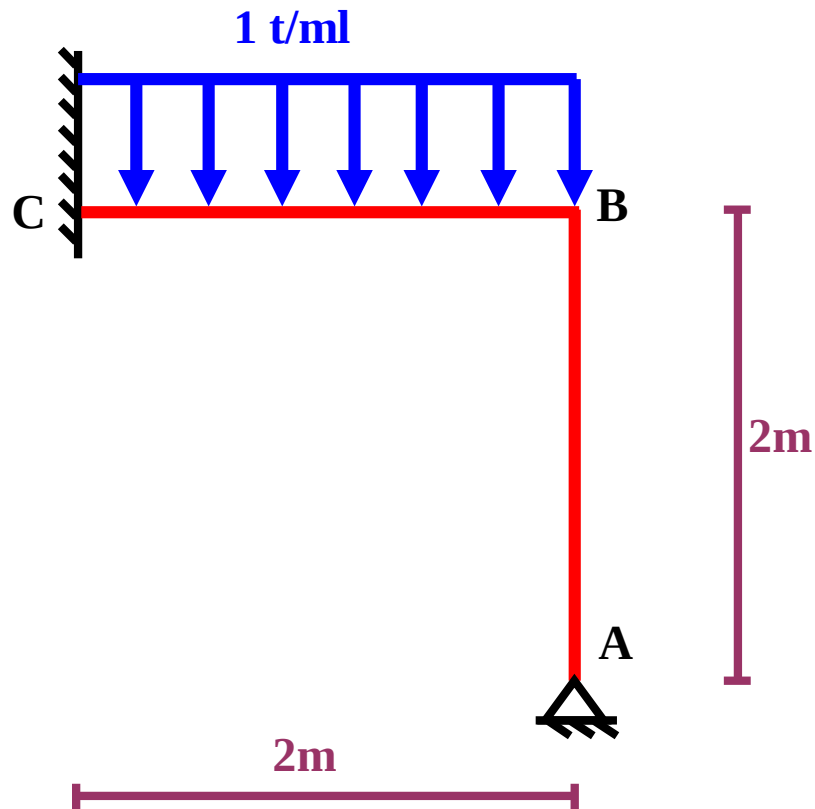
Département de Génie Civil

Série N° 05

Les systèmes hyperstatiques

Soit le portique illustré. Tracer le diagramme de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant:

Exercice 1



Solution:

1-Détermination du degré d'hyperstaticité « H »

$$H = 3C - A - 2S$$

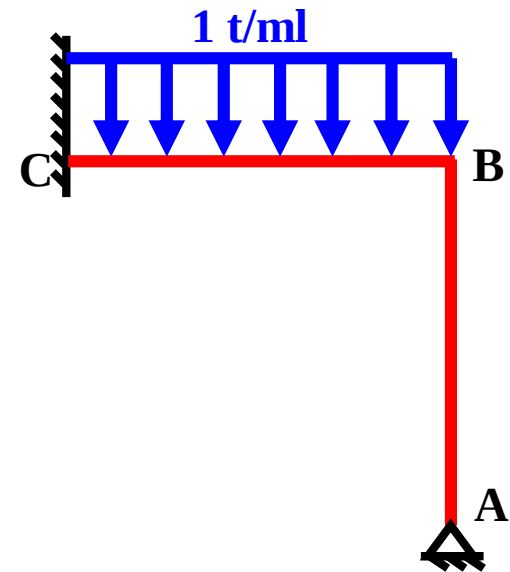
« C » : Le nombre de contours de la structure

« A » : Le nombre d'articulation
(y compris les appuis doubles)

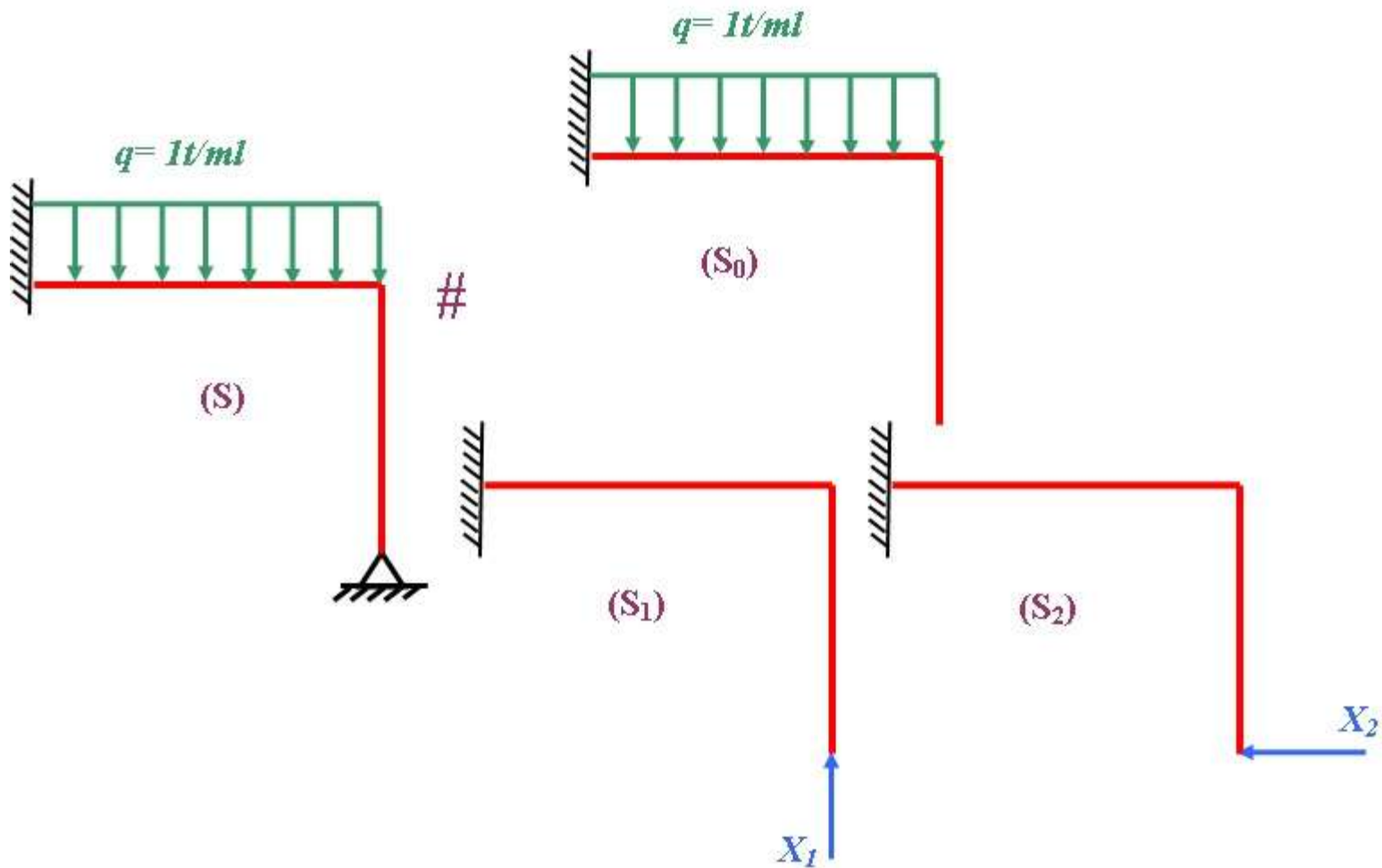
« S » : Le nombre d'appuis simples

$$H = 3 (1) - 1 - 2 (0) = 2.$$

Le nombre de liaisons surabondantes ou inconnues hyperstatiques, est de « 2 »



2- Le choix d'un système de base (fondamental, principal).

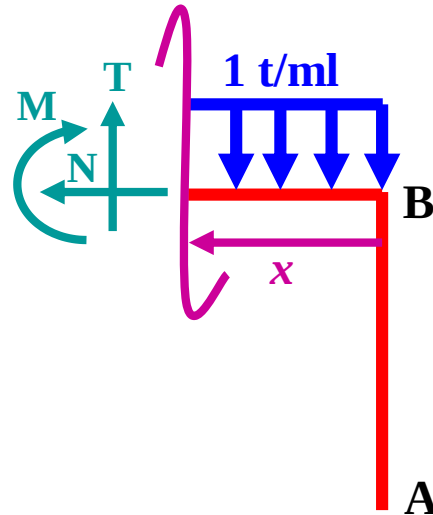


3-Le tracé du diagramme du moment fléchissant sous chargement externe (M_p)

Barre AB :

$$0 \leq x < 2m$$

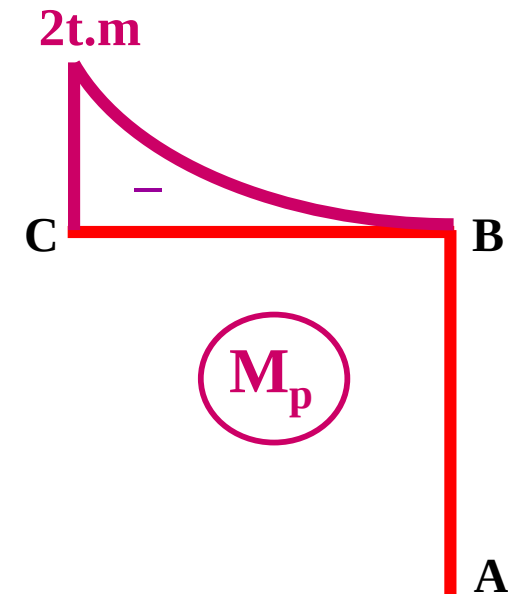
$$M(x) = 0$$



Poutre BC :

$$0 \leq x < 2m$$

$$M(x) = -\frac{x^2}{2} \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(2) = -2t.m \end{cases}$$





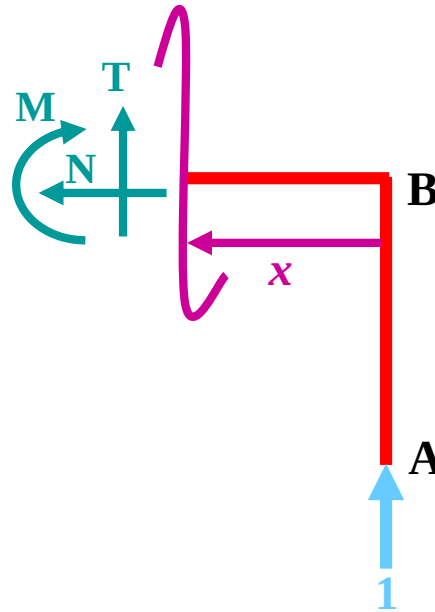
3-Le tracé du diagramme du moment fléchissant sous chargement unitaire (m_1 et m_2)

3-1-Le moment fléchissant (m_1) avec une charge égale à 1.

Barre AB :

$$0 \leq x < 2m$$

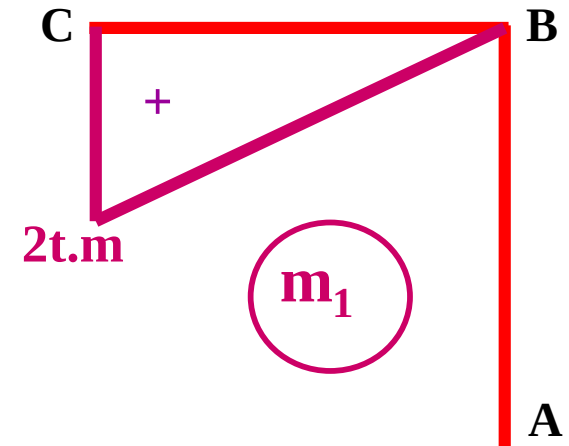
$$M(x) = 0$$



Poutre BC :

$$0 \leq x < 2m$$

$$M(x) = x \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(2) = 2t.m \end{cases}$$





3-Le tracé du diagramme du moment fléchissant sous chargement unitaire (m_1 et m_2)

3-2-Le moment fléchissant (m_2) avec une charge égale à 1.

Barre AB :

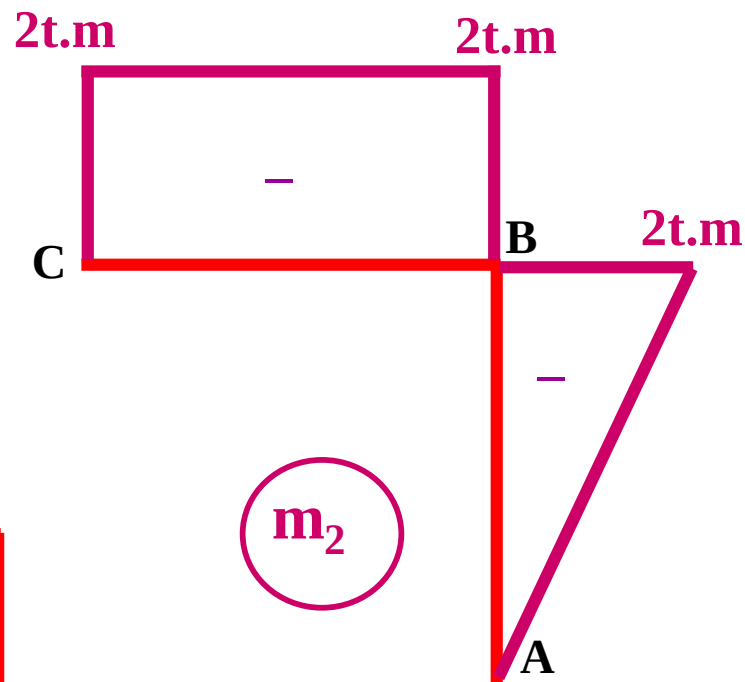
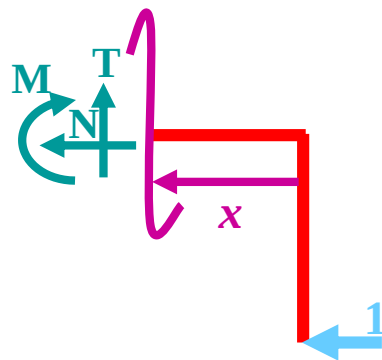
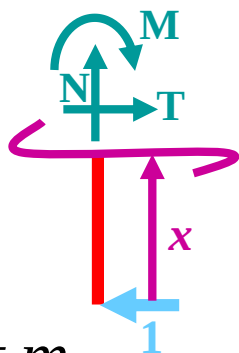
$$0 \leq x < 2m$$

$$M(x) = -x \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(2) = -2t.m \end{cases}$$

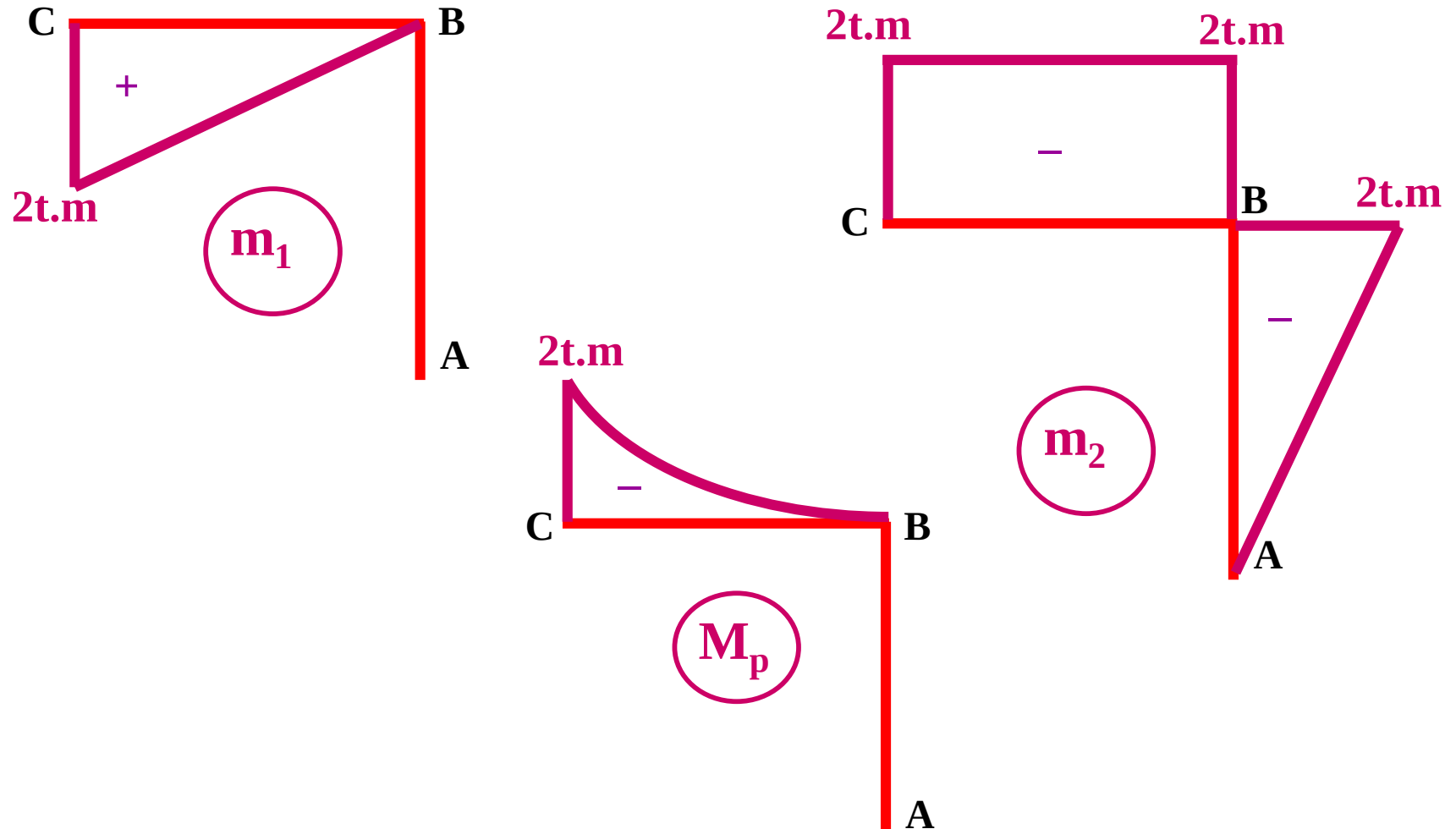
Poutre BC :

$$0 \leq x < 2m$$

$$M(x) = -2$$



3-Le diagramme du moment fléchissant sous les différents chargement

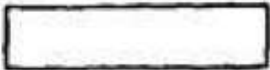
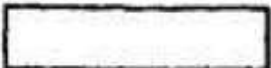


4-Calcul des coefficients d'influence « δ_{ki} , $\Delta_{k\Sigma F}$ »

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \right] = \frac{8}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-2) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) \cdot (-2) \right] = \frac{32}{3EI}$$

Introduire M et m avec leur SIGNE	mg 
Mg 	1/3 Mgmg

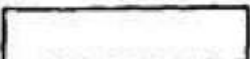
Introduire M et m avec leur SIGNE	m m 
M M 	M.m

4-Calcul des coefficients d'influence « δ_{ki} , $\Delta_{k\Sigma F}$ »

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-2) \right] = \frac{-4}{EI}$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[2 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \right] = \frac{-4}{EI}$$

Introduire M et m avec leur SIGNE	mg 
M 	1/2 Mmg

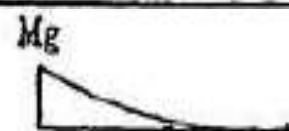
Introduire M et m avec leur SIGNE	m 
Mg 	1/2 Mgm

4-Calcul des coefficients d'influence « δ_{ki} , $\Delta_{k\Sigma F}$ »

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (-2) \cdot \frac{3}{4} \cdot 2 \right] = \frac{-2}{EI}$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (-2) \cdot (-2) \right] = \frac{8}{3EI}$$

Introduire M et m avec leur SIGNE	
	$1/4 \text{ } Mgmg$

Introduire M et m avec leur SIGNE		1
	$1/3 \text{ } Mg m$	$1/1$



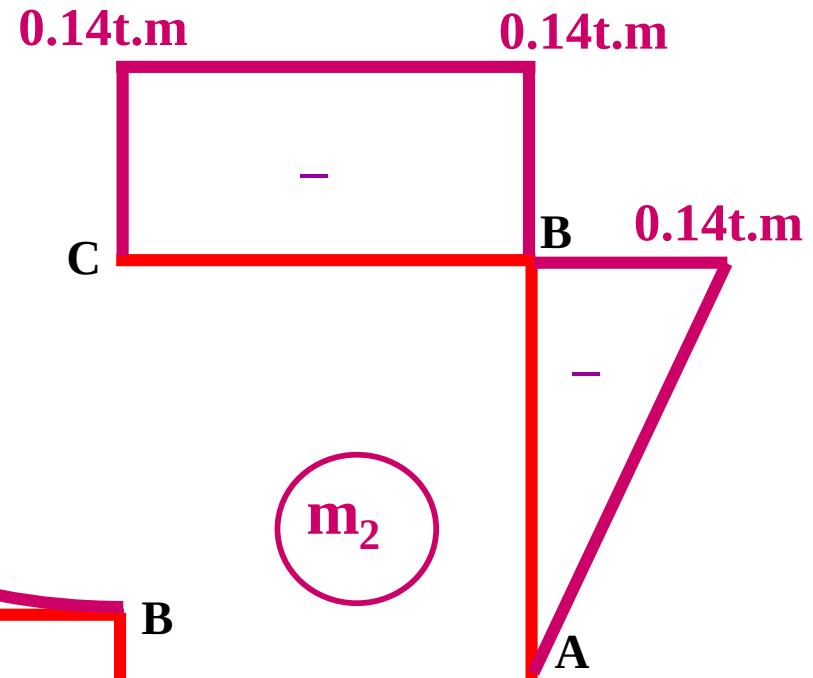
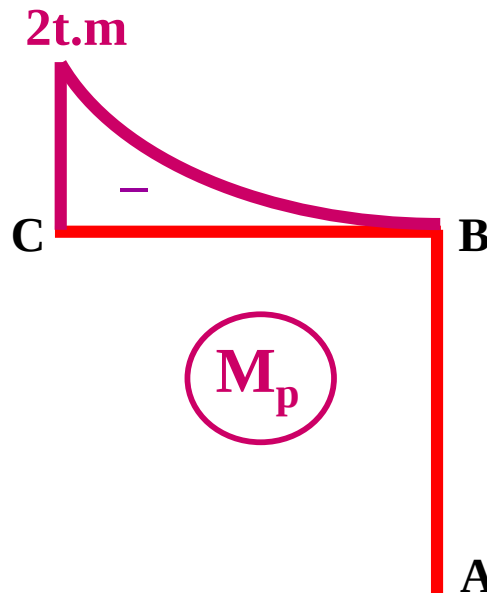
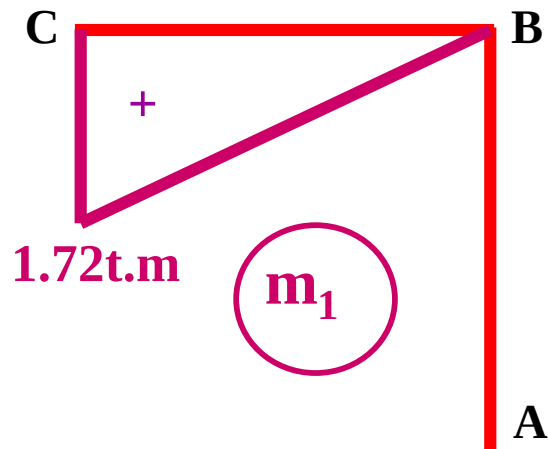
5-La résolution de l'équation canonique

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1\Sigma F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2\Sigma F} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{3}X_1 - 4X_2 - 2 = 0 \\ -4X_1 + \frac{32}{3}X_2 + \frac{8}{3} = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = 0.86t; \quad X_2 = 0.07t$$

6-Le tracé des diagrammes des moments fléchissants sous chargements externe et interne (M_p , m_{x1} , m_{x2}).



7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

7-1-Détermination des moments aux extrémités

D'après les différents diagrammes des moments fléchissants :

Au point A : $M_A = 0$

Au point B : $M_B = -0.14 \text{ t.m}$

Au point C : $M_C = 1.72 - 0.14 - 2 = -0.42 \text{ t.m}$

7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

7-2- Etude des différents efforts

D'après la formule générale des moments internes et externes on a trouvés:

$$\begin{cases} T(x) = t(x) + \left(\frac{M_j - M_i}{L} \right) \\ M(x) = m(x) + M_i + \left(\frac{M_j - M_i}{L} \right) x \end{cases}$$

7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

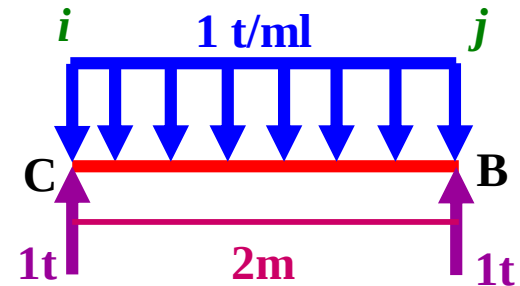
7-2- Etude des différents efforts

Poutre BC :

$$0 \leq x < 2m$$

$$t(x) = 1 - x$$

$$m(x) = x - \frac{x^2}{2}$$



$$T(x) = (1 - x) + \frac{-0.14 - (-0.42)}{2} \quad \left\| \quad M(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} \right) + (-0.42) + \frac{-0.14 - (-0.42)}{2} x \right.$$

$$T(x) = 1.14 - x \quad \left\{ \begin{array}{l} T(0) = 1.14t \\ T(2) = -0.86t \\ T(x) = 0 \Rightarrow x = 1.14m \end{array} \right. \quad \left\| \quad M(x) = -\frac{x^2}{2} + 1.14x - 0.42 \quad \left\{ \begin{array}{l} M(0) = -0.42t.m \\ M(2) = -0.14t.m \\ M(1.14) = 0.229t.m \end{array} \right.$$

7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

7-2- Etude des différents efforts

Barre AB :

$$0 \leq x < 2m$$

$$t(x) = 0$$

$$m(x) = 0$$

$$T(x) = \frac{-0.14 - 0}{2}$$

$$T(x) = -0.07$$

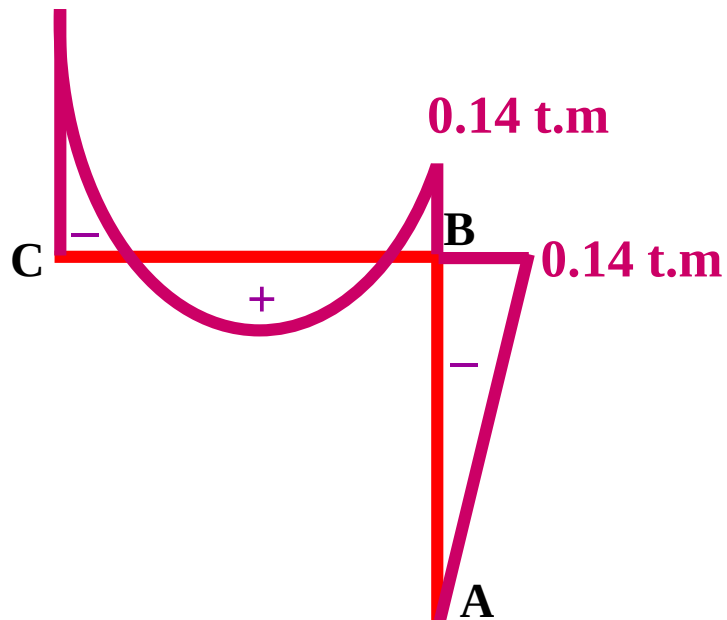


$$M(x) = 0 + \frac{-0.14 - 0}{2} x$$

$$M(x) = -0.07x \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(2) = -0.14t.m \end{cases}$$

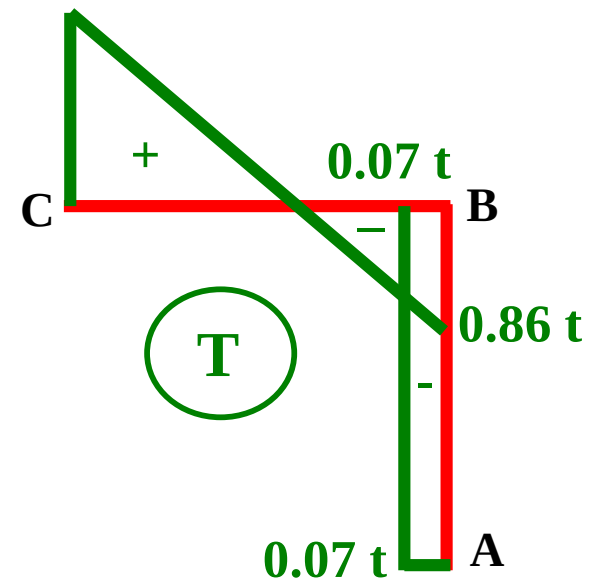


0.42 t.m



M

1.14 t



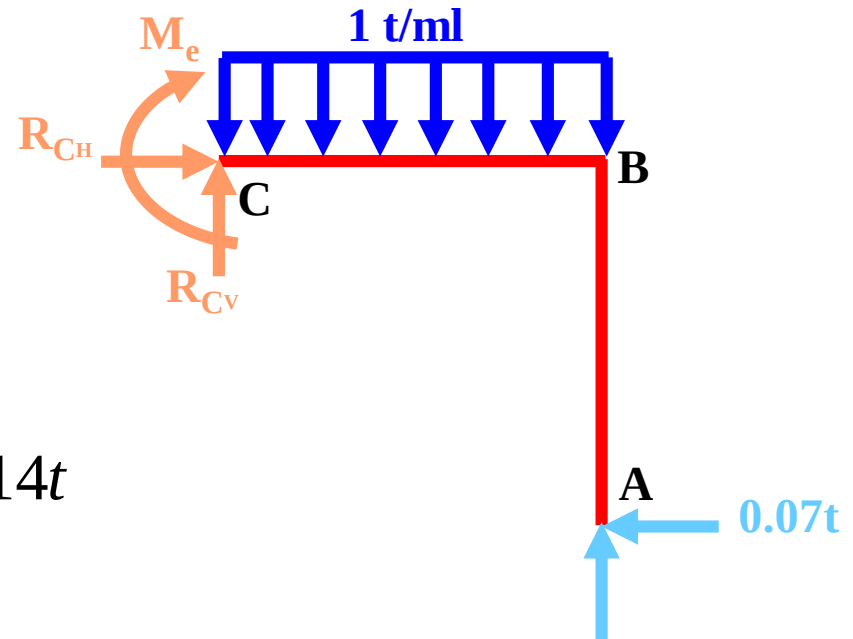
T

Les réaction à l'encastrement sont:

$$\Sigma F_{/X} = 0 \Rightarrow R_{C_H} = 0.07t$$

$$\Sigma F_{/Y} = 0 \Rightarrow R_{C_V} = 2 - 0.86 = 1.14t$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{/C} = 0 &\Rightarrow M_e + 1 \times 2 \times 1 + 0.07 \times 2 - 0.86 \times 2 = 0 \\ &\Rightarrow M_e = -0.42t.m \end{aligned}$$

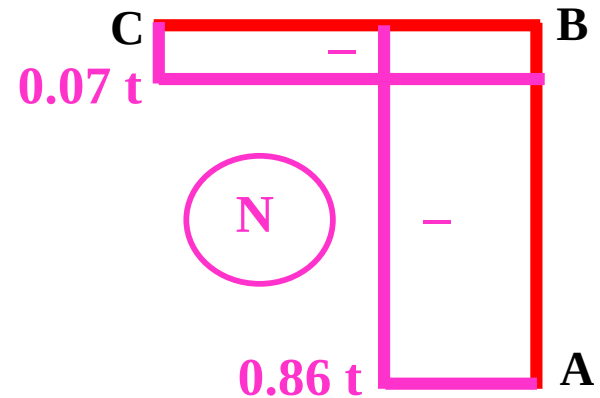




*Diagramme de l'effort normal

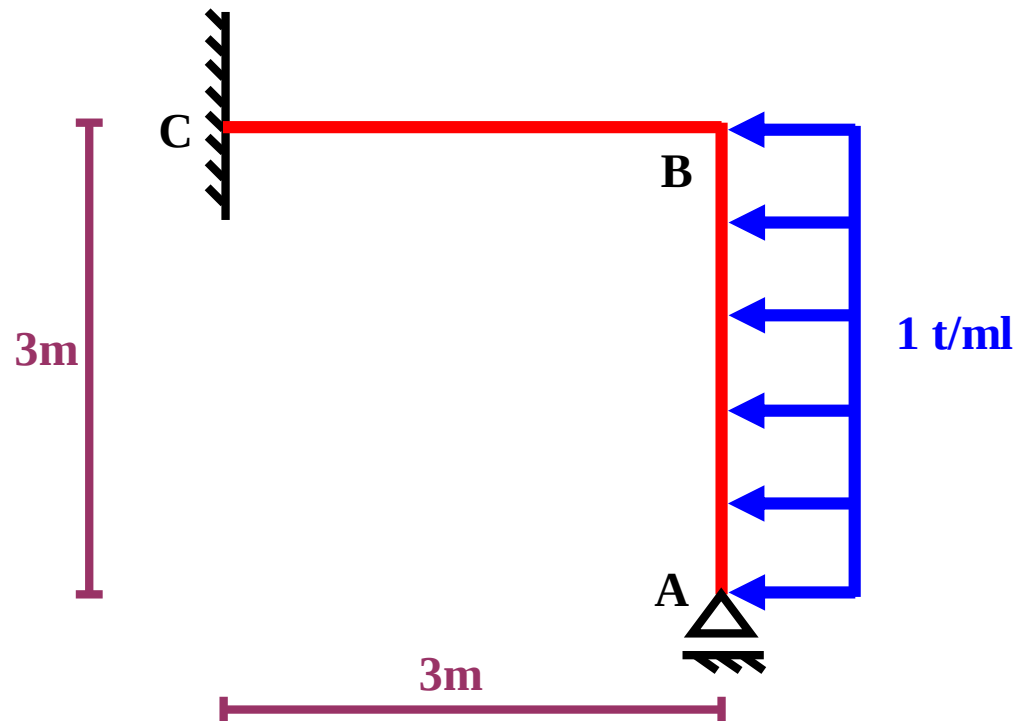
Poteau; $N + 0.86 = 0 \Rightarrow N = -0.86t$

Poutre; $N + 0.07 = 0 \Rightarrow N = -0.07t$



Soit le portique illustré. Tracer le diagramme de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant:

Exercice 2



Solution:

1-Détermination du degré d'hyperstaticité « H »

$$H = 3C - A - 2S$$

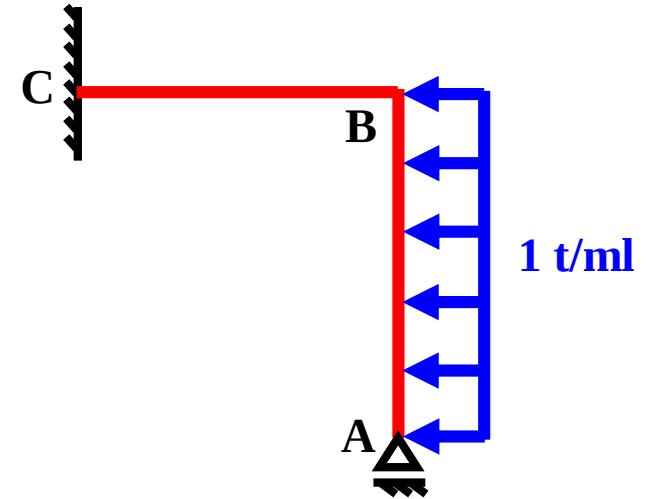
« C » : Le nombre de contours de la structure

« A » : Le nombre d'articulation
(y compris les appuis doubles)

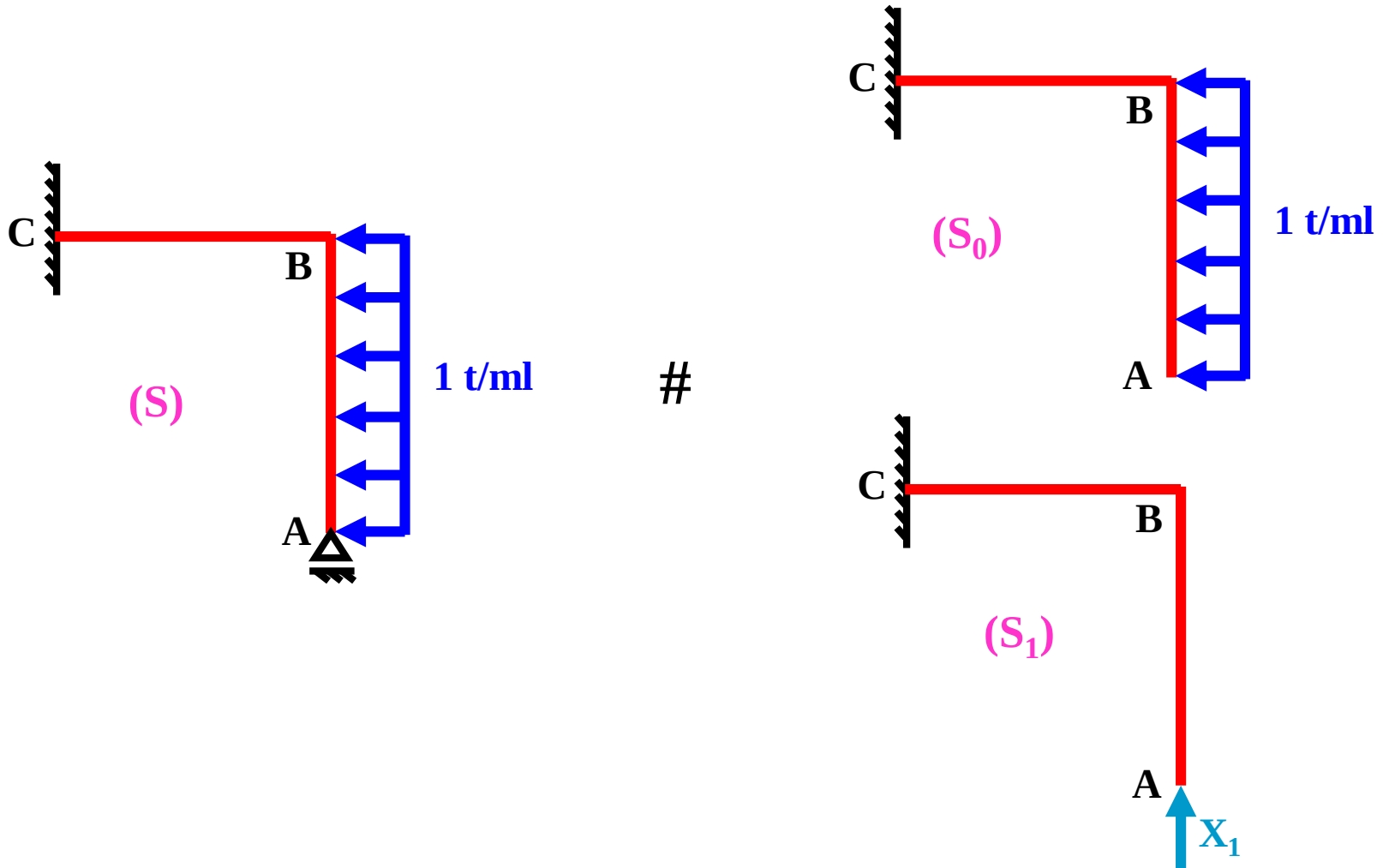
« S » : Le nombre d'appuis simples

$$H = 3(1) - 0 - 2(1) = 1.$$

Le nombre de liaisons surabondantes ou inconnues hyperstatiques, est de « 1 »



2- Le choix d'un système de base (fondamental, principal).



3-Le tracé du diagramme du moment fléchissant sous chargement externe (M_p)

Barre AB :

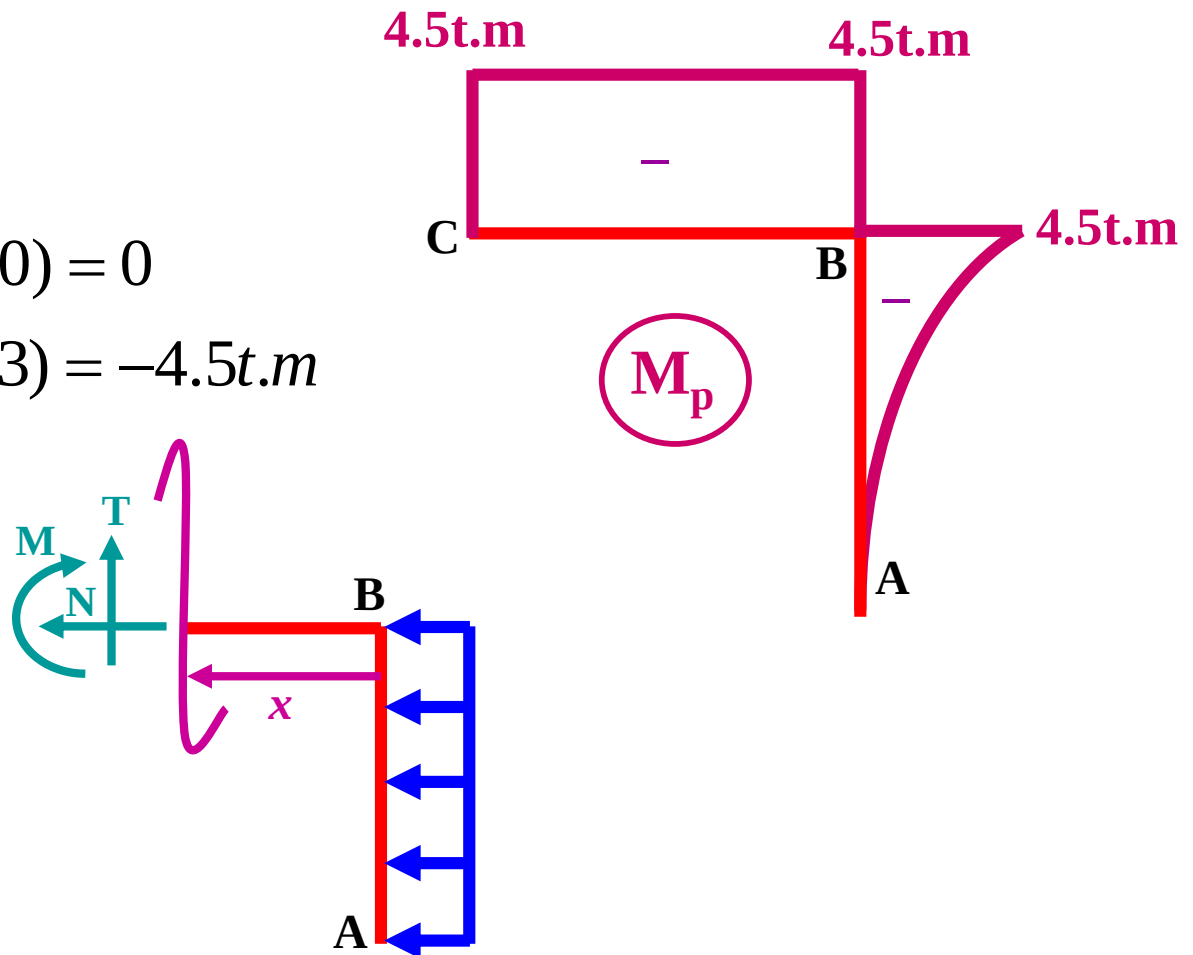
$$0 \leq x < 3m$$

$$M(x) = -\frac{x^2}{2} \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(3) = -4.5t.m \end{cases}$$

Poutre BC :

$$0 \leq x < 3m$$

$$M(x) = -4.5$$

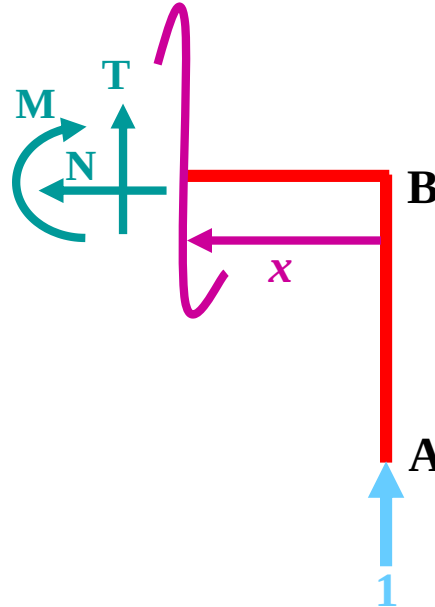


3-Le tracé du diagramme du moment fléchissant (m_1) sous chargement unitaire « 1 ».

Barre AB :

$$0 \leq x < 3m$$

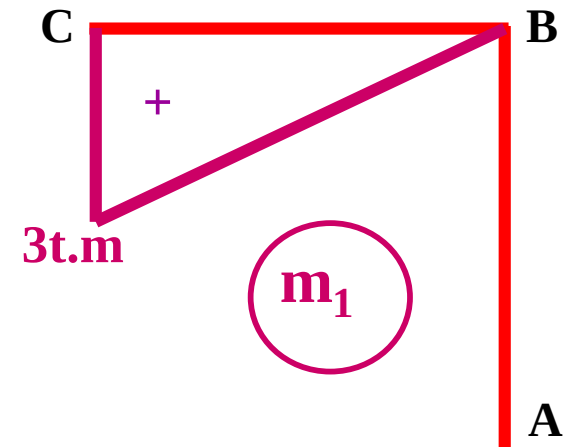
$$M(x) = 0$$



Poutre BC :

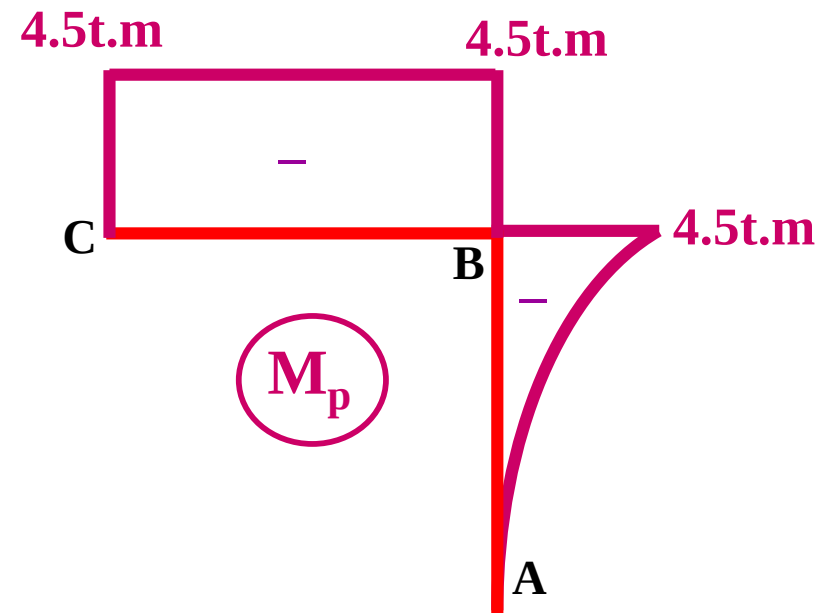
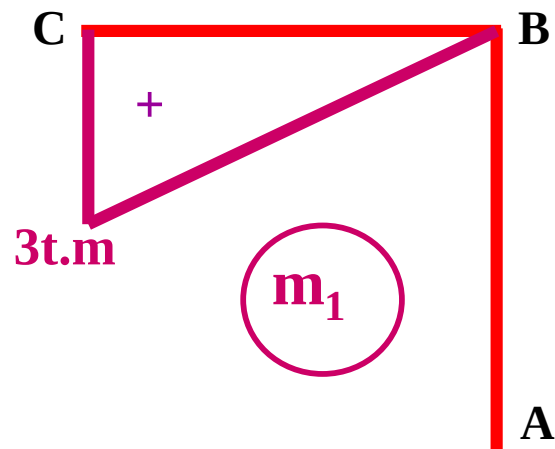
$$0 \leq x < 3m$$

$$M(x) = x \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(3) = 3t.m \end{cases}$$





3-Le diagramme du moment fléchissant sous les différents chargement





4-Calcul des coefficients d'influence « δ_{ki} , $\Delta_{k\Sigma F}$ »

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \right] = \frac{9}{EI}$$

Introduire M et m. avec leur SIGNE	
	$\frac{1}{3} Mgmg$



4-Calcul des coefficients d'influence « δ_{ki} , $\Delta_{k\Sigma F}$ »

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \left[(-4.5).3.\frac{1}{2}.3 \right] = \frac{-20.25}{EI}$$

Introduire M et m avec leur SIGNE	
	$\frac{1}{2} Mmg$



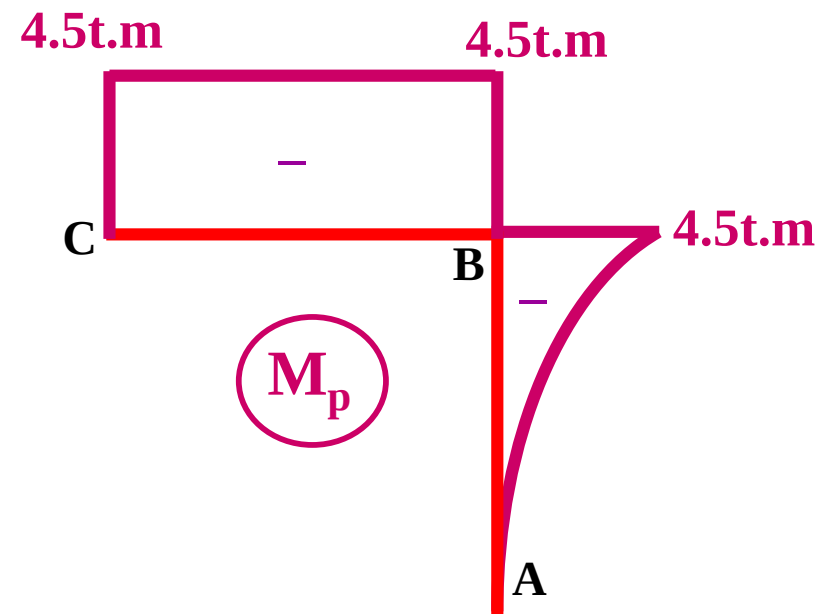
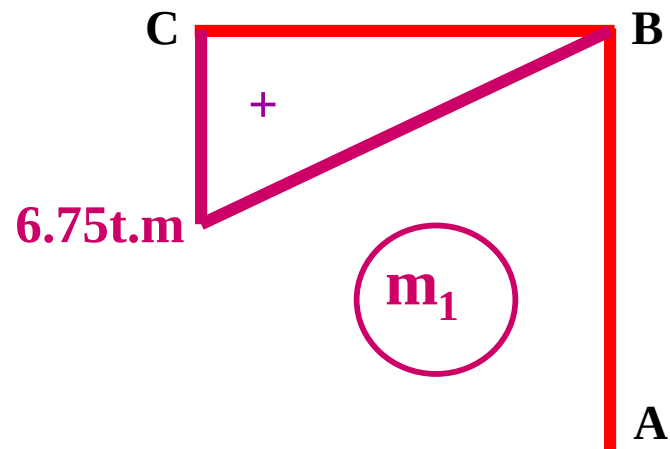
5-La résolution de l'équation canonique

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1\Sigma F} = 0$$

$$9X_1 - 20.25 = 0$$

$$X_1 = 2.25t;$$

6-Le tracé des diagrammes des moments fléchissants sous chargements externe et interne (M_p , m_{x1}).





7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

7-1-Détermination des moments aux extrémités

D'après les différents diagrammes des moments fléchissants :

Au point A : $M_A = 0$

Au point B : $M_B = -4.5 \text{ t.m}$

Au point C : $M_C = 6.75 - 4.5 = 2.25 \text{ t.m}$

7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

7-2- Etude des différents efforts

D'après la formule générale des moments internes et externes on a trouvés:

$$\begin{cases} T(x) = t(x) + \left(\frac{M_j - M_i}{L} \right) \\ M(x) = m(x) + M_i + \left(\frac{M_j - M_i}{L} \right) x \end{cases}$$

7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

7-2- Etude des différents efforts

Poutre BC :

$$0 \leq x < 3m$$

$$t(x) = 0$$

$$m(x) = 0$$



$$T(x) = \frac{-4.5 - (2.25)}{3}$$

$$T(x) = -2.25$$

$$M(x) = +(2.25) + \frac{-4.5 - (2.25)}{3} x$$

$$M(x) = -2.25x + 2.25 \left\{ \begin{array}{l} M(0) = 2.25t.m \\ M(3) = -4.5t.m \\ M(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \end{array} \right.$$

7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

7-2- Etude des différents efforts

Barre AB :

$$0 \leq x < 3m$$

$$t(x) = x - 1.5$$

$$m(x) = \frac{x^2}{2} - 1.5x$$

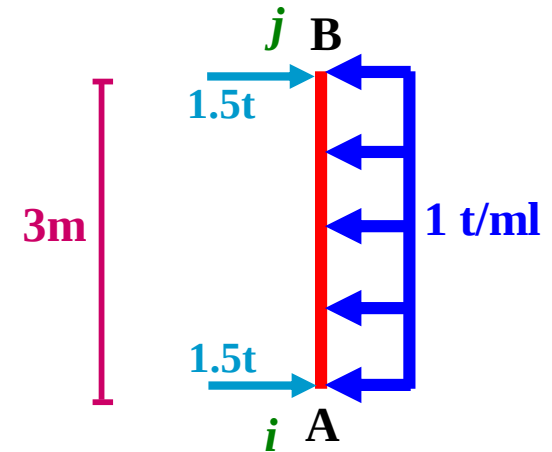
$$T(x) = (x - 1.5) + \frac{-4.5 - 0}{3}$$

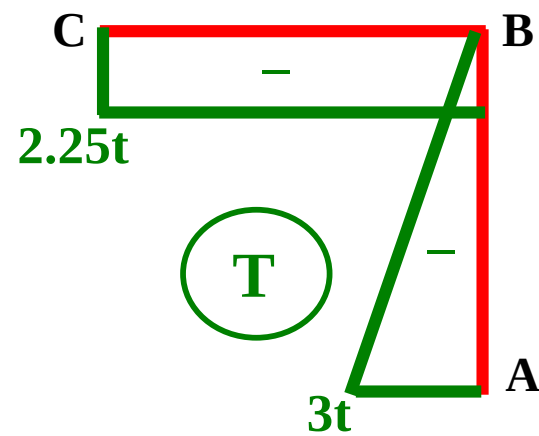
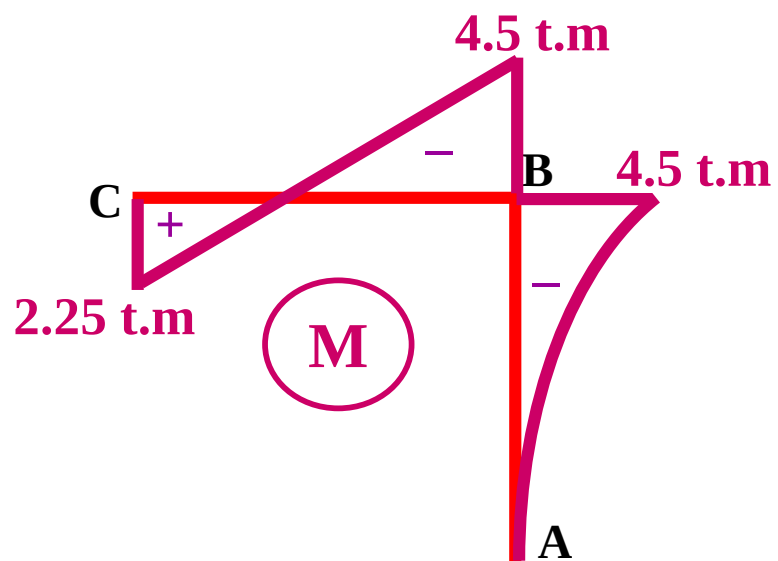
$$T(x) = x - 3 \begin{cases} T(0) = -3t \\ T(3) = 0 \end{cases}$$



$$M(x) = \left(\frac{x^2}{2} - 1.5x \right) + 0 + \frac{-4.5 - 0}{3} x$$

$$M(x) = \frac{x^2}{2} - 3x \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(3) = -4.5t.m \end{cases}$$



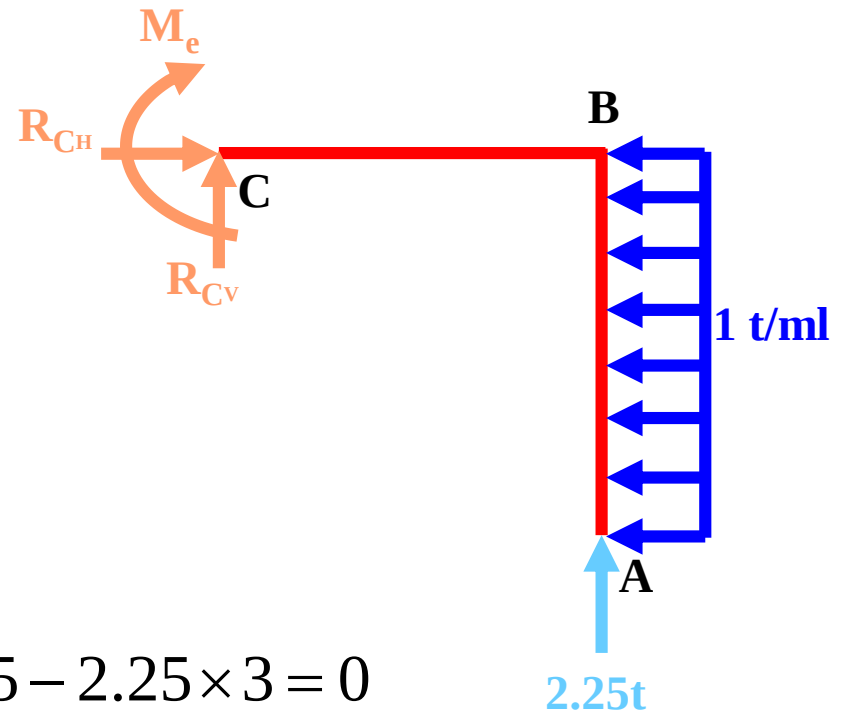


Les réaction à l'encastrement sont:

$$\Sigma F_{/X} = 0 \Rightarrow R_{C_H} = 3t$$

$$\Sigma F_{/Y} = 0 \Rightarrow R_{C_V} = -2.25t$$

$$\begin{aligned} \Sigma M_{/C} = 0 &\Rightarrow M_e + 1 \times 3 \times 1.5 - 2.25 \times 3 = 0 \\ &\Rightarrow M_e = 2.25t.m \end{aligned}$$

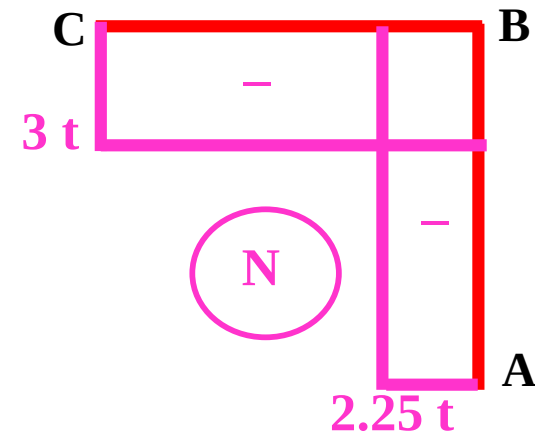




*Diagramme de l'effort normal

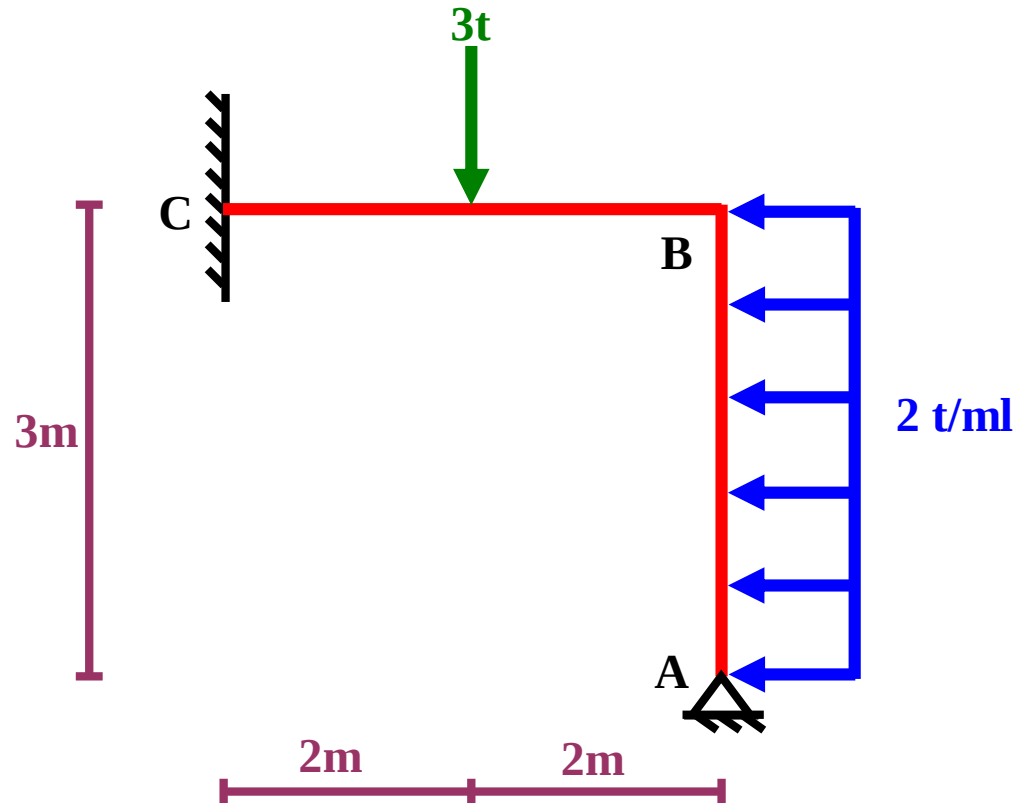
Poteau; $N + 2.25 = 0 \Rightarrow N = -2.25t$

Poutre; $N + 3 = 0 \Rightarrow N = -3t$



Soit le portique illustré. Tracer le diagramme de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant:

Exercice 3





Solution:

1-Détermination du degré d'hyperstaticité « H »

$$H=3C-A-2S$$

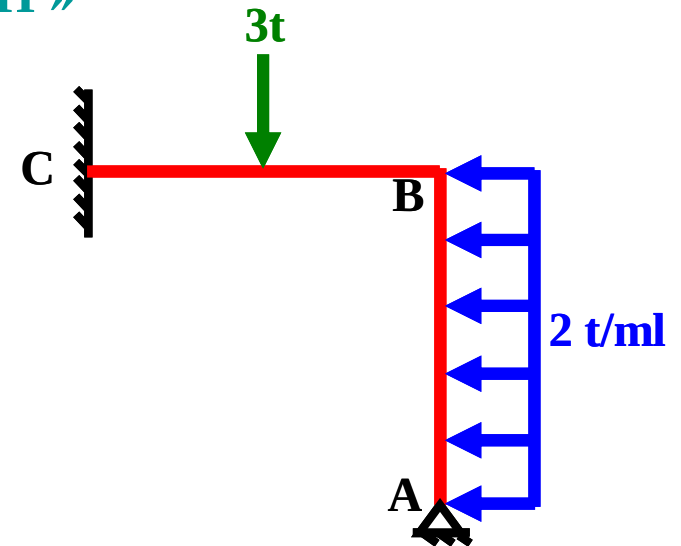
« C » : Le nombre de contours de la structure

« A » : Le nombre d'articulation
(y compris les appuis doubles)

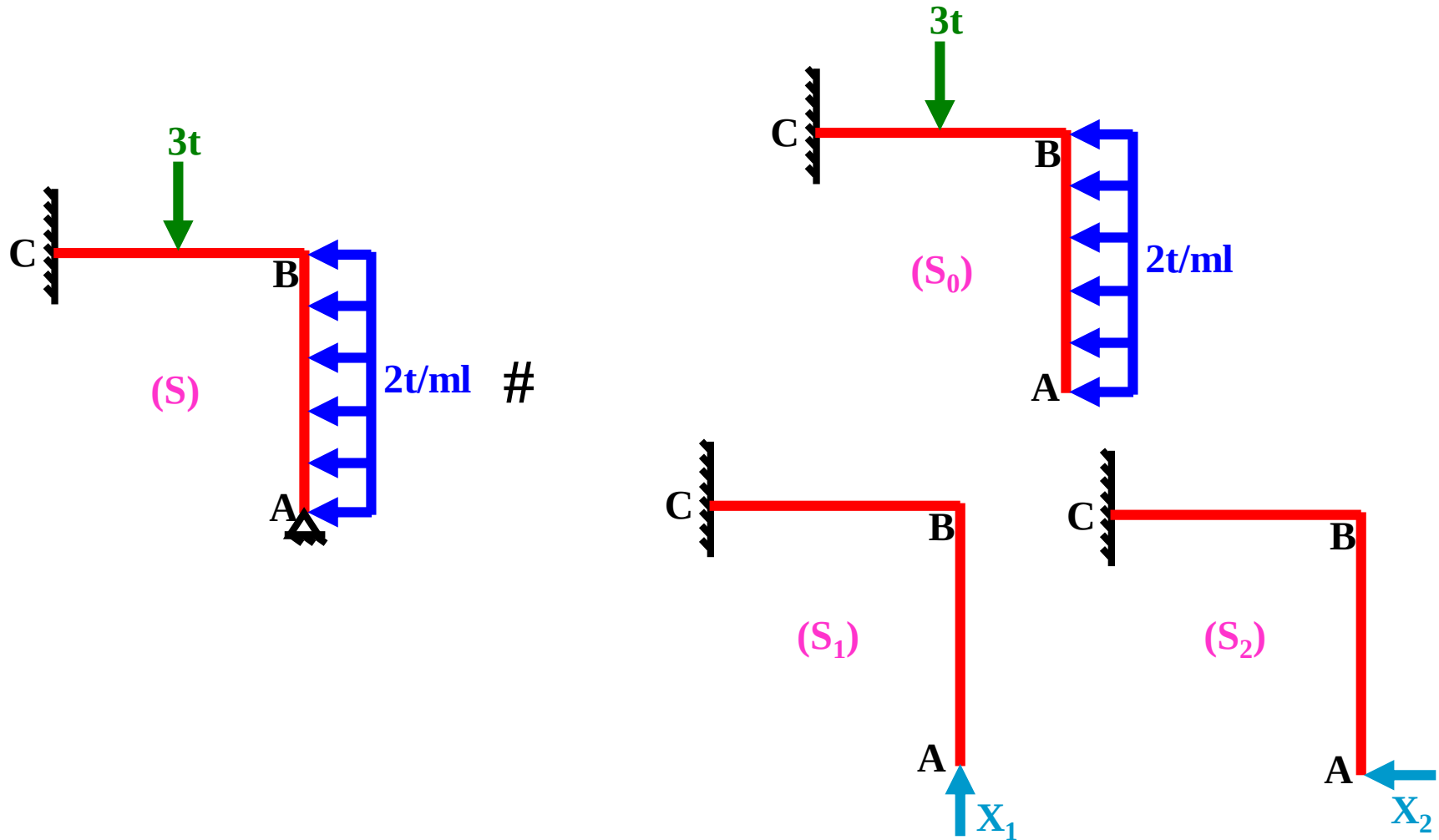
« S » : Le nombre d'appuis simples

$$H = 3 (1) - 1 - 2 (0) = 2.$$

Le nombre de liaisons surabondantes ou inconnues hyperstatiques, est de « 2 »



2- Le choix d'un système de base (fondamental, principal).

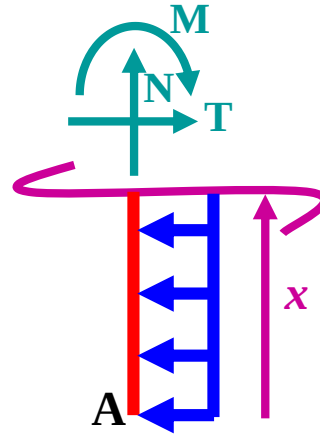


3-Le tracé du diagramme du moment fléchissant sous chargement externe (M_p)

Barre AB :

$$0 \leq x < 3m$$

$$M(x) = -x^2 \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(3) = -9t.m \end{cases}$$



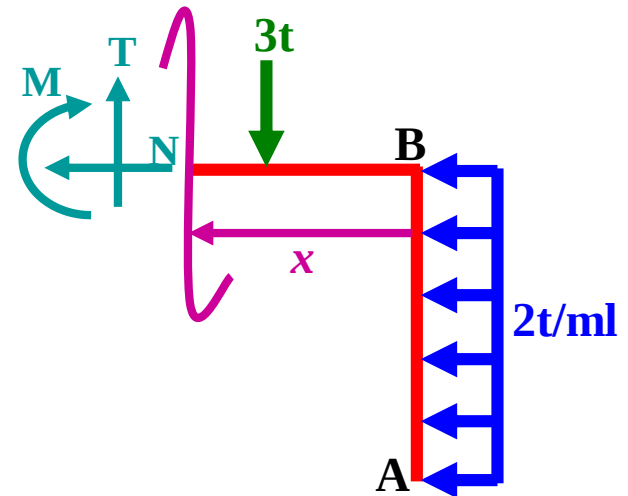
Poutre BC :

$$0 \leq x < 2m$$

$$M(x) = -9$$

$$2 \leq x < 4m$$

$$M(x) = -9 - 3(x - 2) \begin{cases} M(2) = -9t.m \\ M(4) = -15t.m \end{cases}$$



3-Le tracé du diagramme du moment fléchissant sous chargement interne (M_p)

Barre AB :

$$0 \leq x < 3m$$

$$M(x) = -x^2 \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(3) = -9t.m \end{cases}$$

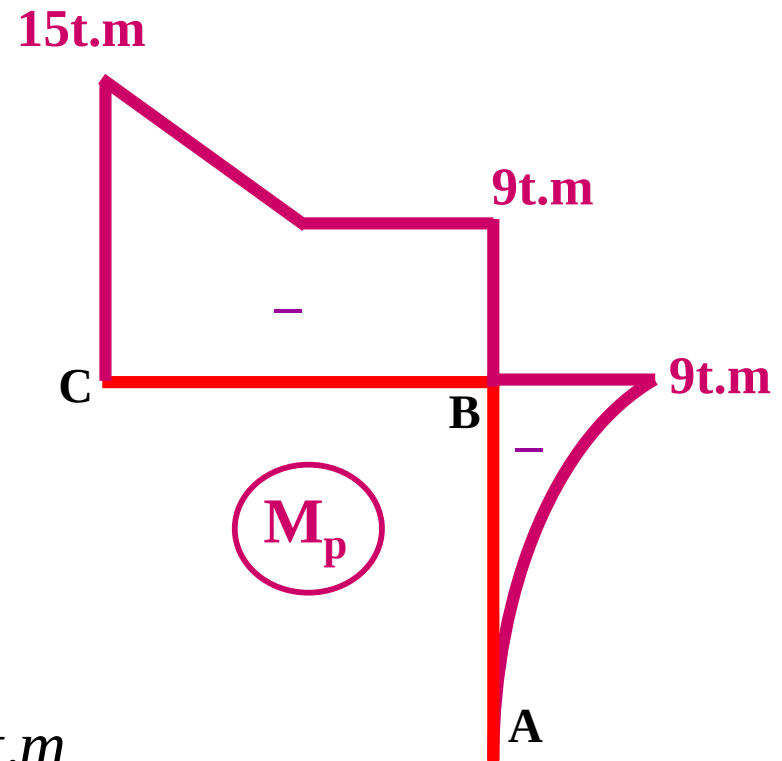
Poutre BC :

$$0 \leq x < 2m$$

$$M(x) = -9$$

$$2 \leq x < 4m$$

$$M(x) = -9 - 3(x - 2) \begin{cases} M(2) = -9t.m \\ M(4) = -15t.m \end{cases}$$





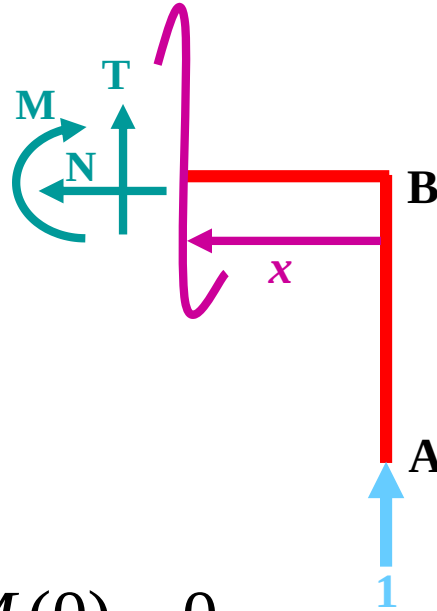
3-Le tracé du diagramme du moment fléchissant sous chargement unitaire (m_1 et m_2)

3-1-Le moment fléchissant (m_1) avec une charge égale à 1.

Barre AB :

$$0 \leq x < 3m$$

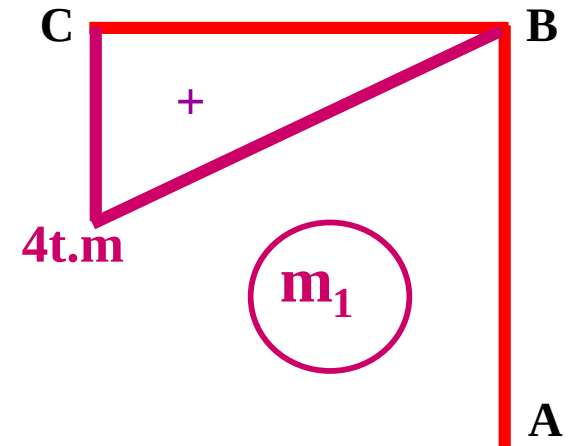
$$M(x) = 0$$



Poutre BC :

$$0 \leq x < 4m$$

$$M(x) = x \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(4) = 4t.m \end{cases}$$



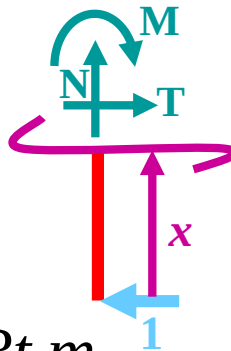
3-Le tracé du diagramme du moment fléchissant sous chargement unitaire (m_1 et m_2)

3-2-Le moment fléchissant (m_2) avec une charge égale à 1.

Barre AB :

$$0 \leq x < 3m$$

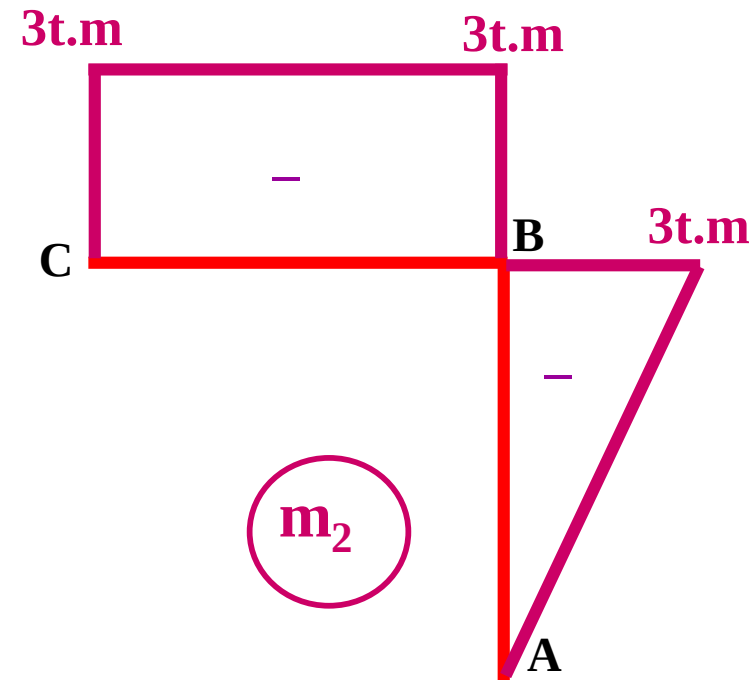
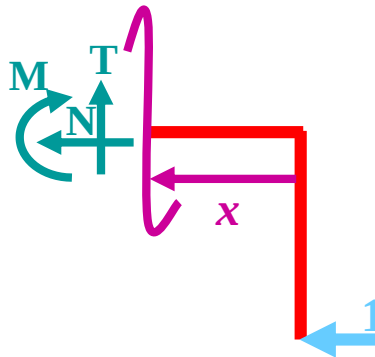
$$M(x) = -x \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(3) = -3t.m \end{cases}$$



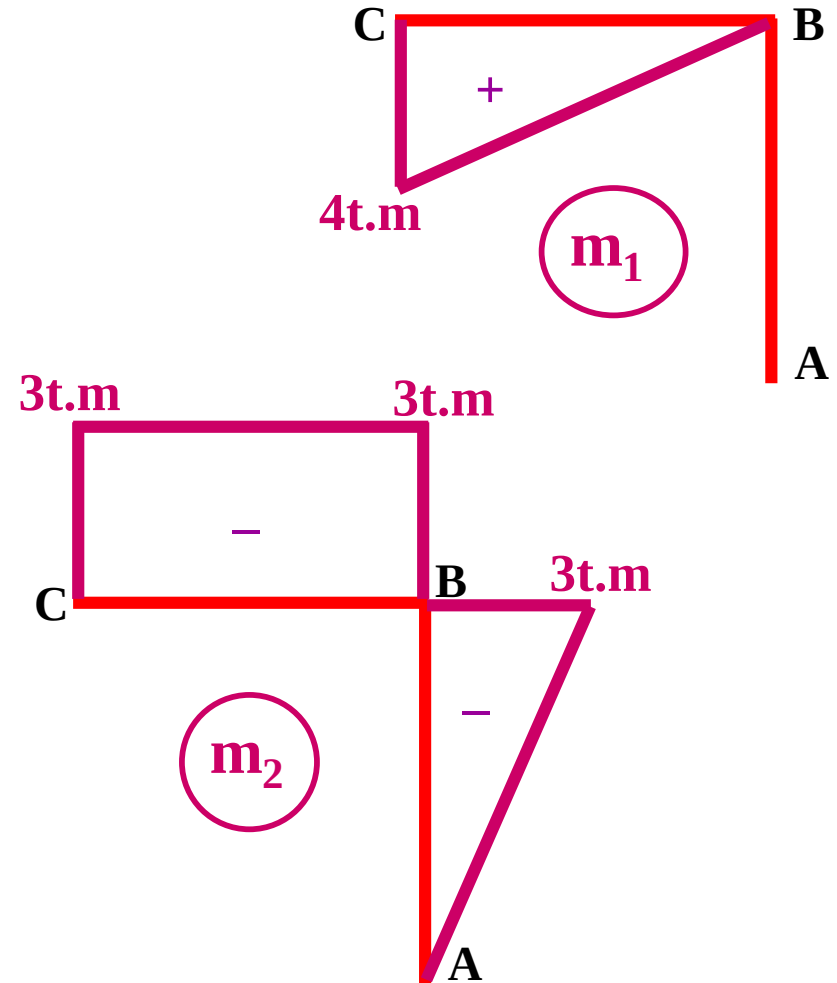
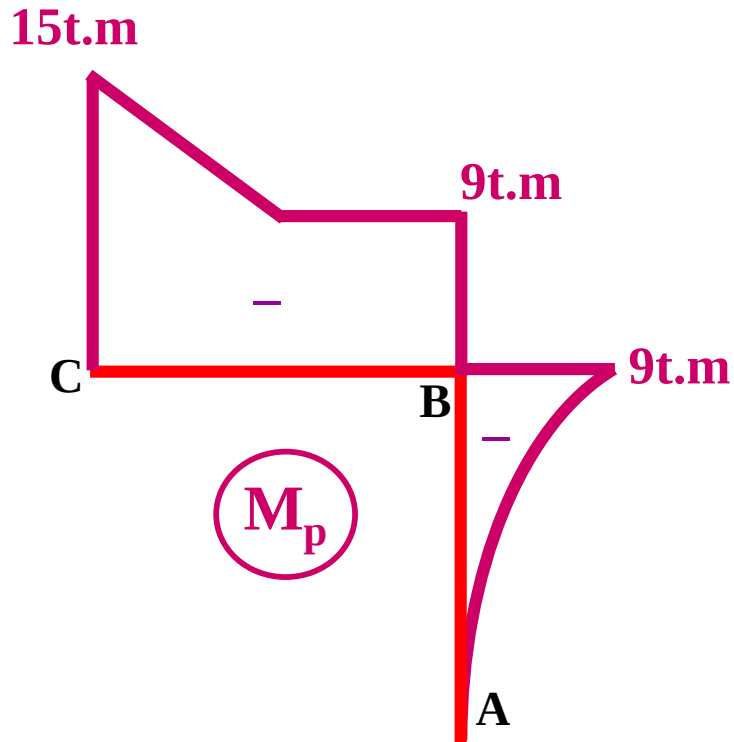
Poutre BC :

$$0 \leq x < 4m$$

$$M(x) = -3$$



3-Le diagramme du moment fléchissant sous les différents chargement

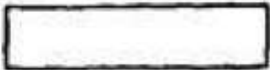
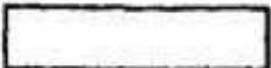


4-Calcul des coefficients d'influence « δ_{ki} , $\Delta_{k\Sigma F}$ »

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right] = \frac{64}{3EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-3) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-3) + 4 \cdot (-3) \cdot (-3) \right] = \frac{45}{EI}$$

Introduire M et m avec leur SIGNE	mg 
Mg 	$\frac{1}{3} Mgmg$

Introduire M et m avec leur SIGNE	m m 
M M 	M.m

4-Calcul des coefficients d'influence « δ_{ki} , $\Delta_{k\Sigma F}$ »

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot (-3) \right] = \frac{-24}{EI}$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{EI} \left[4 \cdot (-3) \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \right] = \frac{-24}{EI}$$

Introduire M et m avec leur SIGNE	mg 
M 	1/2 Mmg

Introduire M et m avec leur SIGNE	m m 
Mg 	1/2 Mgm 1,



4-Calcul des coefficients d'influence « δ_{ki} , $\Delta_{k\Sigma F}$ »

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \left[4.(-9). \frac{1}{2}.4 + \frac{1}{2}.2.(-6). \left(\frac{2}{3}.2 + 2 \right).4 \right] = \frac{-152}{EI}$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} \left[\frac{1}{3}.3.(-9). \frac{3}{4}.(-3) + 4.(-9).(-3) + \frac{1}{2}.2.(-6).(-3) \right] = \frac{146.25}{EI}$$



5-La résolution de l'équation canonique

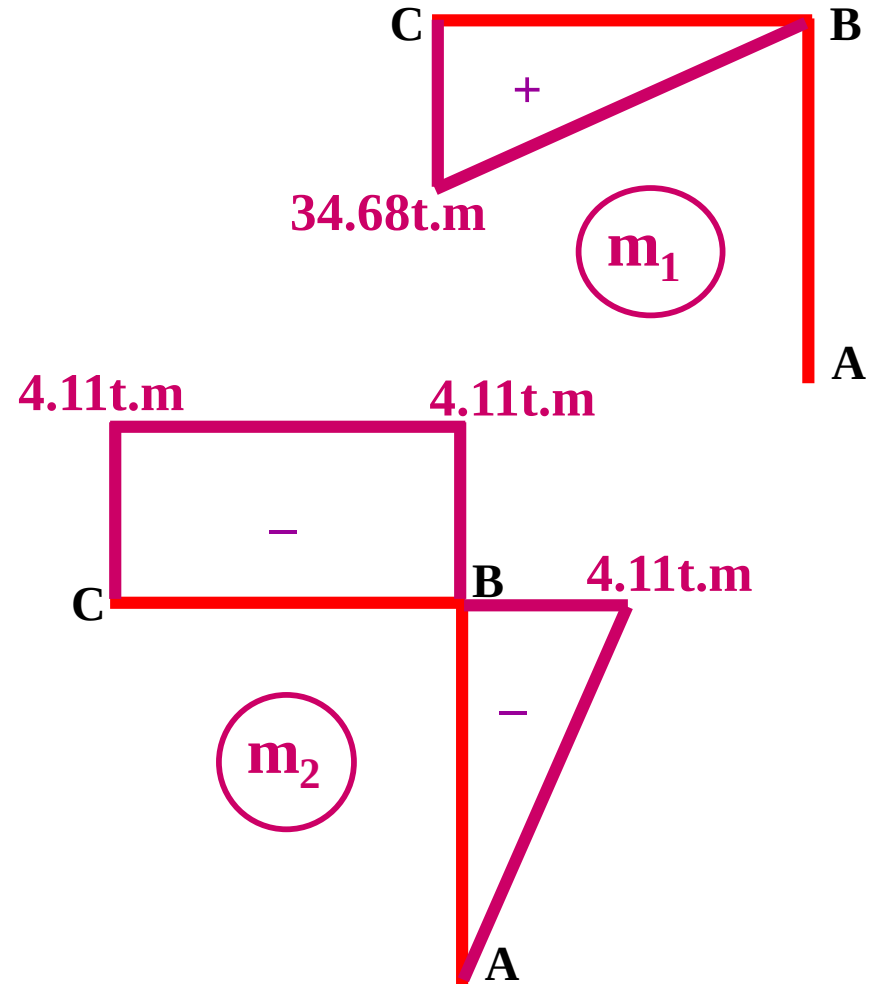
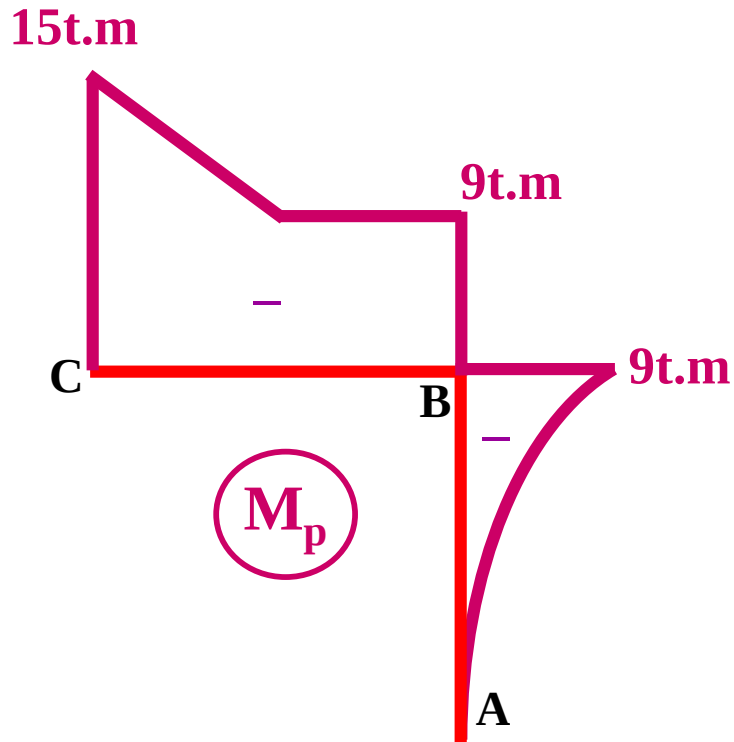
$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1\Sigma F} = 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2\Sigma F} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{64}{3}X_1 - 24X_2 - 152 = 0 \\ -24X_1 + 45X_2 + 146.25 = 0 \end{cases}$$

$$X_1 = 8.67t; \quad X_2 = 1.37t$$



6-Le tracé des diagrammes des moments fléchissants sous chargements externe et interne (M_p , m_{x1} , m_{x2}).



7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

7-1-Détermination des moments aux extrémités

D'après les différents diagrammes des moments fléchissants :

Au point A : $M_A = 0$

Au point B : $M_B = -9 - 4.11 = -13.11\text{t.m}$

Au point C : $M_C = 34.68 - 15 - 4.11 = 15.57\text{t.m}$

Au point D : $M_D = 17.34 - 9 - 4.11 = 4.23\text{t.m}$

7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

7-2- Etude des différents efforts

D'après la formule générale des moments internes et externes on a trouvés:

$$\begin{cases} T(x) = t(x) + \left(\frac{M_j - M_i}{L} \right) \\ M(x) = m(x) + M_i + \left(\frac{M_j - M_i}{L} \right) x \end{cases}$$

7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

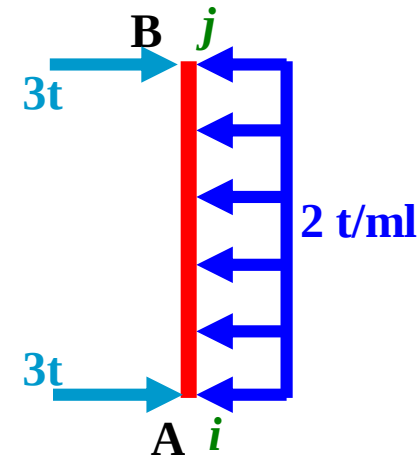
7-2- Etude des différents efforts

Barre AB :

$$0 \leq x < 3m$$

$$t(x) = 2x - 3$$

$$m(x) = x^2 - 3x$$



$$T(x) = (2x - 3) + \frac{(-13.11) - 0}{3}$$

$$T(x) = 2x - 7.37 \begin{cases} T(0) = -7.37t \\ T(3) = -1.37t \end{cases}$$

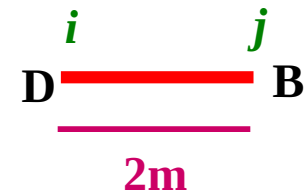
$$M(x) = (x^2 - 3x) + (0) + \frac{(-13.11) - 0}{3} x$$

$$M(x) = x^2 - 7.37x \begin{cases} M(0) = 0 \\ M(3) = -13.11t.m \end{cases}$$

7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

7-2- Etude des différents efforts

Poutre BC (Tronçon BD):



$$0 \leq x < 2m$$

$$t(x) = 0$$

$$m(x) = 0$$

$$T(x) = \frac{4.23 - (-13.11)}{2}$$

$$T(x) = 8.67$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M(x) = (-13.11) + \frac{4.23 - (-13.11)}{2} x \\ M(x) = 8.67x - 13.11 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} M(0) = -13.11t.m \\ M(2) = 4.23t.m \\ M(x) = 0 \Rightarrow x = 1.51m \end{array} \right.$$

7-Le tracé des diagrammes de l'effort normal, effort tranchant et moment fléchissant

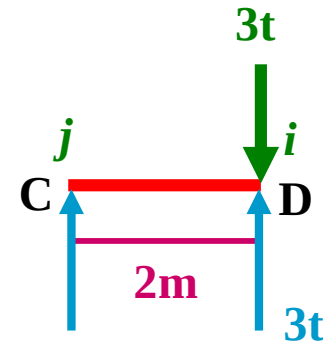
7-2- Etude des différents efforts

Poutre BC (tronçon DC) :

$$0 \leq x < 2m$$

$$t(x) = 0$$

$$m(x) = 0$$

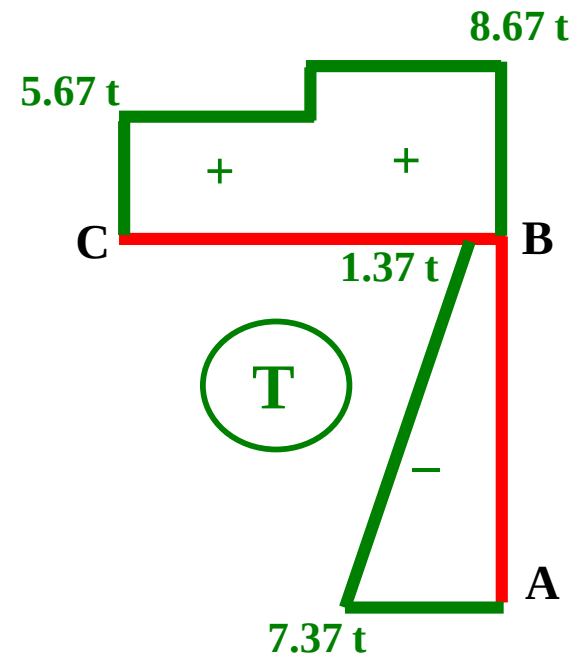
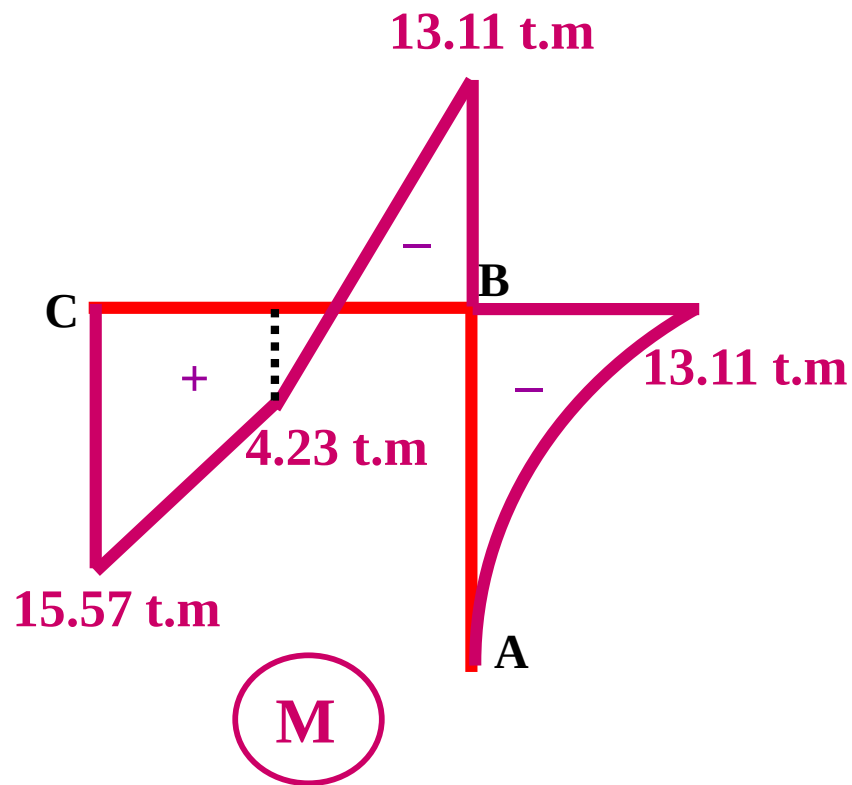


$$T(x) = \frac{15.57 - (4.23)}{2}$$

$$T(x) = 5.67$$

$$M(x) = (4.23) + \frac{15.57 - (4.23)}{2} x$$

$$M(x) = 5.67x + 4.23 \begin{cases} M(0) = 4.23t.m \\ M(2) = 15.57t.m \end{cases}$$

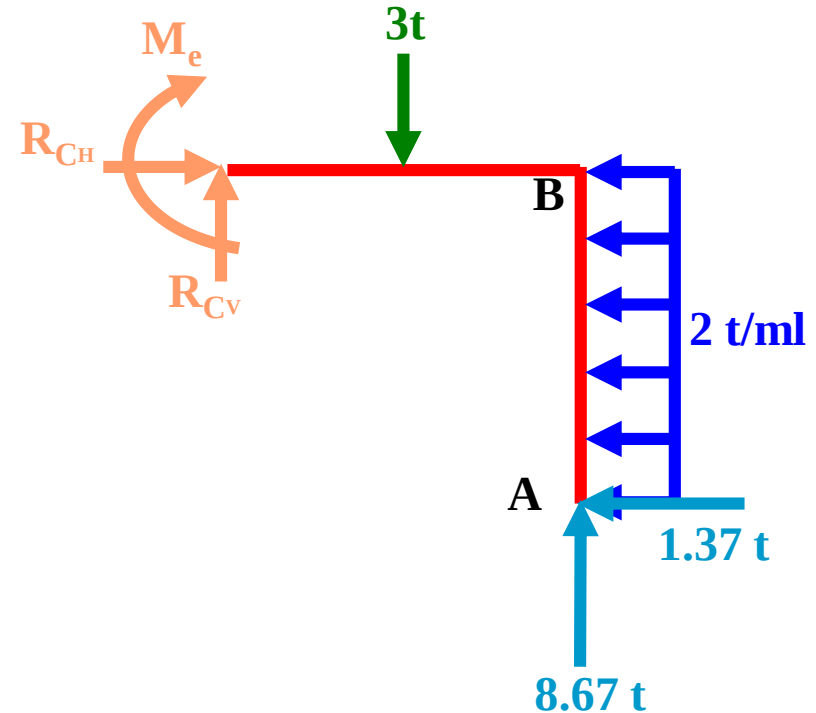


Les réaction à l'encastrement sont:

$$\begin{aligned}\Sigma F_{/X} = 0 &\Rightarrow R_{C_H} - 2 \times 3 - 1.37 = 0 \\ &\Rightarrow R_{C_H} = 7.37t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma F_{/Y} = 0 &\Rightarrow R_{C_V} + 8.67 - 3 = 0 \\ &\Rightarrow R_{C_V} = -5.67t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_{/C} = 0 &\Rightarrow M_e + 3 \times 2 + 2 \times 3 \times 1.5 + 1.37 \times 3 - 8.67 \times 4 = 0 \\ &\Rightarrow M_e = 15.57t.m\end{aligned}$$

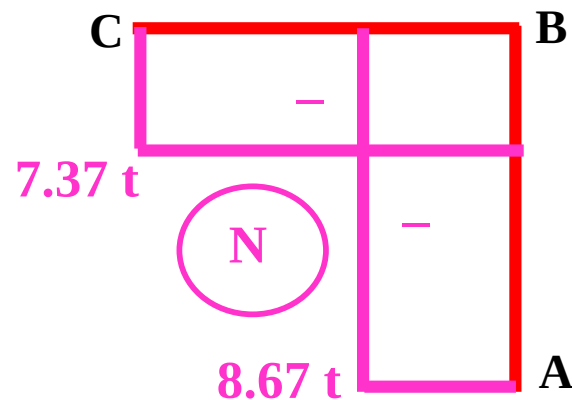




*Diagramme de l'effort normal

Poteau; $N + 8.67 = 0 \Rightarrow N = -8.67t$

Poutre; $N + 7.37 = 0 \Rightarrow N = -7.37t$



Merci